Probabilidades

Hugo S. Salinas

Introducción

Tal vez estemos acostumbrados con algunas ideas de **probabilidad**, ya que esta forma parte de la cultura cotidiana. Con frecuencia escuchamos a personas que hacen afirmaciones relacionadas con la probabilidad:

- Probablemente Chile gane el primer partido en el mundial de Sudáfrica.
- Hay un 98% de probabilidad de que no llueva mañana en Copiapó.
- Tengo una posibilidad de 50-50 de aprobar el examen de Estadística.
- Es más probable perder que ganar en el Casino de Juegos.

¿Qué significan exactamente este tipo de expresiones?. Algunas afirmaciones pueden estar basadas en **información científica** y otras en **prejuicios subjetivos**. Cualquiera que sea el caso, son **inferencias probabilísticas**: no hechos, **sino conjeturas.**

En este capítulo estudiaremos el concepto básico de probabilidad y sus reglas aplicadas a sucesos simples y sucesos compuestos.
La teoría de la **probabilidad es la base de la inferencia estadística y un instrumento esencial** en el análisis de la **variabilidad.**

Conceptos importantes

Para extender los resultados de la muestra a la población, es necesario utilizar la idea de modelo probabilístico. Cuando tomamos una muestra de una población, nuestras conclusiones o inferencias acerca de la población tienen un grado de incertidumbre. El objetivo de este capítulo es presentar una introducción a la teoría de probabilidades como fundamento para la inferencia estadística, la que finalmente nos permitirá tomar una decisión sobre nuestro problema.

Definición:

Un **experimento aleatorio** es un proceso (repetible) cuyo resultado no se conoce de antemano.

Si se repite un experimento aleatorio bajo las mismas condiciones y anotamos las frecuencias relativas de un suceso, observaremos que estas tienden a estabilizarse alrededor de un número que está entre cero y uno. Este valor recibe el nombre de **probabilidad.**

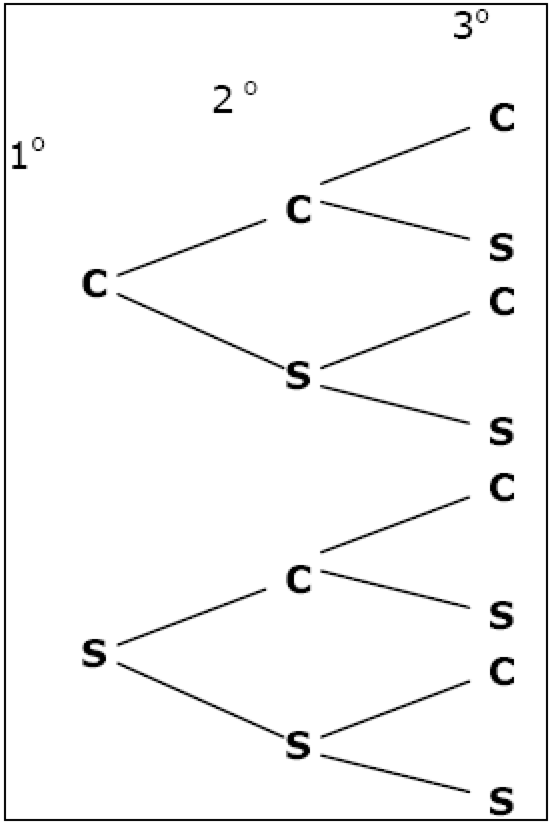
Ejemplo: Sea el experimento aleatorio ε:= lanzar una moneda tres veces.

Podemos contar el número de resultados posibles de este experimento como un conjunto:

S = {CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS}

O con un diagrama de árbol:

Conceptos importantes cont.



Definición:

Un **espacio muestral** es el conjunto de todos los valores posibles de un experimento aleatorio.

Conceptos importantes cont.

Ejemplo

Escribir el espacio muestral S para los siguientes experimentos:

a) Lanzar una moneda y se observar el lado visible.

b) Lanzar dos dados y se registrar los números que aparecen en cada dado.

c) Lanzar dos dados y anotar la suma de los valores.

d) Tomar una muestra aleatoria de tamaño 10 de un lote de piezas y contar las que tienen defectos.

e) Seleccionar aleatoriamente un estudiante y anotar el tiempo que estudió estadística en las últimas 24 horas.

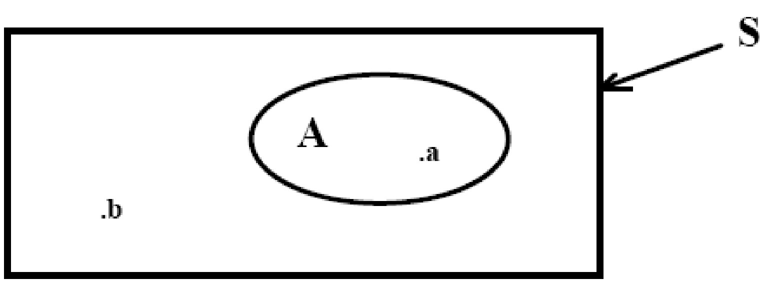
f) El tiempo que espero la llegada de la micro en el paradero.

Definición:

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral S.

Se dice que un evento A *ocurre* si cualquiera de los elementos o resultados en A ocurren.

Habitualmente se usan los diagramas de Venn, de la teoría de conjuntos, para visualizar el espacio muestral y los eventos.



Conceptos importantes cont.

Ejemplo

Considerar el experimento de lanzar dos dados y se registrar los números que aparecen en cada dado.

S = { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

Marcar los resultados que corresponden a los siguientes eventos:

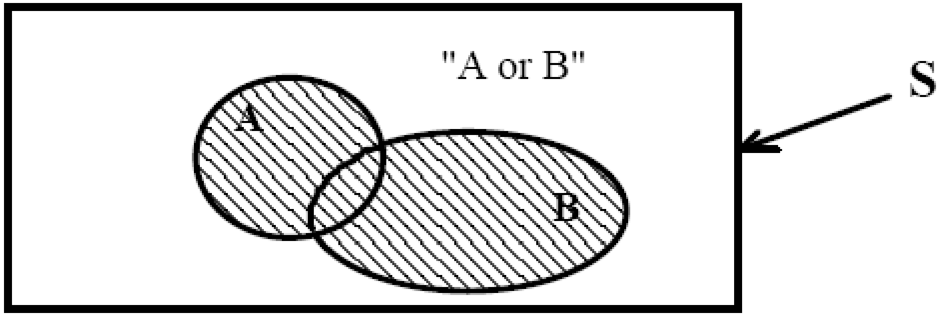
a) Evento A = "No sale seis".

b) Evento B = "Sale exactamente un seis".

c) Evento C = "Salen exactamente dos seis".

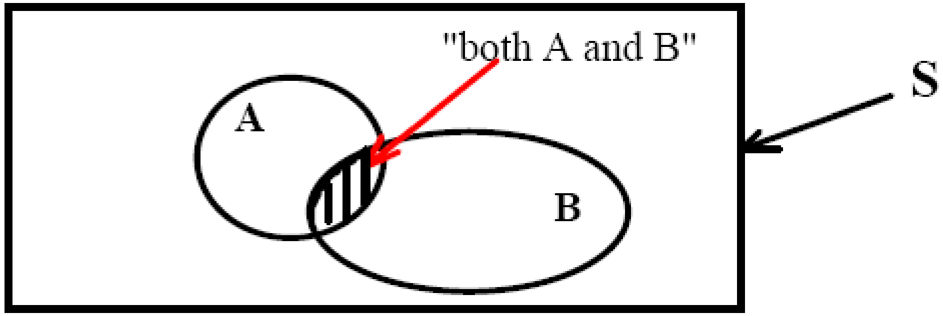
d) Evento D = “Sale al menos un seis”.

La **unión** de dos eventos, representada por “*A* o *B*”, se denota por: $A \cup B$



Conceptos importantes cont.

La **intersección** de dos eventos, representado por "*A* y *B*", se denota por: $A \cap B$

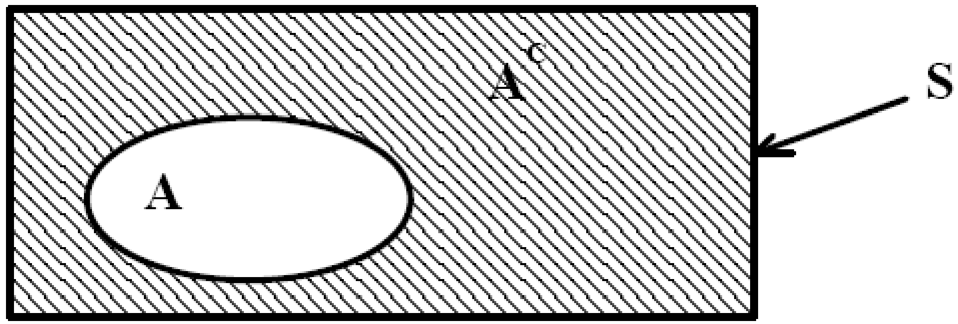


Es importante distinguir el conjunto resultante de la unión ($\cup$) o intersección ($\cap$) de sucesos:

- Si A y B son sucesos, $A \cup B$ es el suceso que ocurre si y sólo si A **o** B (o ambos) ocurren.
- Si A y B son sucesos, $A \cap B$ es el suceso que ocurre si y sólo si A **y** B ocurren simultáneamente.

Conceptos importantes cont.

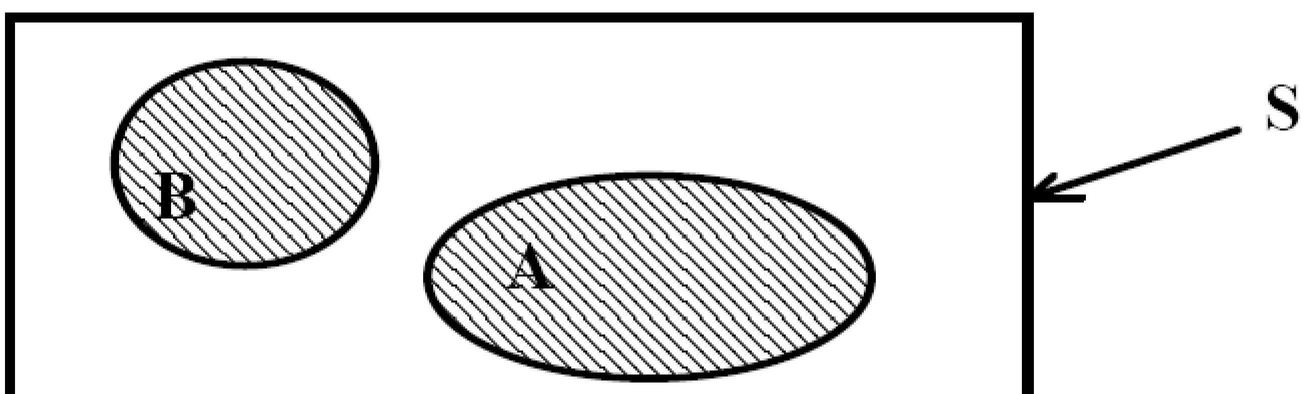
El **complemento** de un evento, representado por "no *A*", se denota por: A^C



El **complemento de cualquier suceso es el conjunto de resultados que no están** contenidos en ese suceso.

Definición:

Dos eventos A y B son ***disjuntos*** o ***mutuamente excluyentes*** si no tienen elementos en común. Así, si un evento ocurre, el otro *no puede* ocurrir.



Conceptos importantes cont.

Los sucesos son **mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno de ellos impide la** ocurrencia del otro.

Ejemplo

¿Mutuamente excluyentes?

En cada caso, determinar si los eventos son mutuamente excluyentes:

a) Un vendedor hace una venta:

A = “la venta excede $5.000”.

B = “la venta excede $50.0000”.

b) Un vendedor hace una venta:

A = “la venta es de menos de $5.000”.

B = “la venta es de entre $10.000 y $50.000”.

C = “la venta es de más de $100.000”.

Ejemplo

Considerando el experimento aleatorio de arrojar un dado y registrar el número de la cara superior. Proponer:

- **un suceso (evento) elemental**
- **un suceso imposible**
- **dos sucesos mutuamente excluyentes**
- **dos sucesos no mutuamente excluyentes**

Definiciones de Probabilidad

Definición frecuencista de probabilidad:

La **probabilidad de que ocurra un evento** es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que ocurra ese evento, si fuera repetido muchas veces.

Ejemplo: Sea el experimento aleatorio: **lanzamiento de una moneda**. Cuando se lanza una moneda al aire sólo hay dos resultados posibles, cara o sello. El resultado no se puede predecir de antemano y variará cuando se lance en forma repetida, sin embargo se observa una cierta regularidad en los resultados, una regularidad que sólo emerge después de muchas repeticiones.

LA GRÁFICA 1 muestra la regularidad observada al lanzar una moneda 1550 veces. Para cada lanzamiento, desde el primero hasta el último, se ha representado la proporción de lanzamientos que han dado "cara" hasta ese momento.

La proporción de lanzamientos que dan cara es bastante variable al principio, pero posteriormente se estabiliza a medida que se hacen más y más lanzamientos. Llega un momento en que esta proporción se acerca a 0.5 y se mantiene en ese valor. Se dice que 0.5 es la **probabilidad de que salga cara.**

Una probabilidad de 0.5 significa que el suceso cara "**ocurre la mitad de las veces después de muchos lanzamientos**". En otras palabras, se puede decir que si se arrojara un gran número de veces esa moneda al aire, aproximadamente el 50% de las veces se observaría el resultado cara o la frecuencia relativa del suceso cara sería aproximadamente 0.5.

Definiciones de Probabilidad: GRÁFICA 1

Fuente: Mendenhall, Sincich, 1997

Definiciones de Probabilidad cont.

Curiosidades:

- El naturalista francés Count Buffon (1707-1788) lanzó una moneda 4040 veces. Resultado: 2048 caras, proporción 2048/4040=0,5069 o 50,69% de caras.

- Alrededor del 1900, el estadístico inglés Karl Pearson ilanzó una moneda 24 mil veces! Resultado: 12012 caras, proporción 12012/24000=0,5005 o 50,05% de caras.

- Durante la II guerra mundial, el matemático australiano John Kerrich, mientras estaba en prisión lanzó una moneda 10 mil veces. Resultado: 5067 caras, proporción 5067/10000=0,5067 o 50,67% de caras.

Formalizando las ideas se definen:
ϵ : lanzar una moneda al aire y registrar el resultado.
El espacio muestral asociado al experimento ϵ: $S = \{C, S\}$
Sea:
A: el resultado es cara
n_A: frecuencia absoluta del suceso A
n : número de repeticiones del experimento ϵ.
$f(A) = \frac{n_A}{n}$: proporción de veces que se verifica cara en n tiradas.
Generalizando:

$$f(A) = \frac{n_A}{n} \to P(A), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Es decir, la probabilidad de un suceso (o resultado) es el número hacia el cual tiende la frecuencia relativa del mismo cuando el número de repeticiones de la experiencia tiende a infinito. Es decir, es una frecuencia relativa calculada en la población Esta definición de probabilidad se conoce como **definición frecuencial de probabilidad**.

Definiciones de Probabilidad cont.

Definicion clásica de probabilidad o de Laplace

Se ha considerado a la probabilidad de ocurrencia de un resultado determinado de un experimento aleatorio, como la proporción de veces (**frecuencia relativa**) que se obtiene dicho resultado después de una *gran cantidad de repeticiones.*

Sin embargo, considerando la experiencia aleatoria de arrojar una moneda, se podría haber conjeturado sin repetir dicha experiencia, que la probabilidad de obtener el resultado "cara" es 0.5.

Esto se sustenta en que si la moneda no está cargada, cada resultado tiene la misma chance de ocurrir. Esta descripción permite introducir lo que se conoce como **definición clásica de probabilidad o de Laplace**.

Reglas de Probabilidades.

Para cualquier evento A, le asignamos el número P(A) llamado la **probabilidad del evento A.**

- Le asignamos una probabilidad a cada resultado en el espacio muestral, entre 0 y 1, tal que la suma de estas probabilidades es igual a 1, y
- La probabilidad de cualquier evento es la suma de las probabilidades de los resultados que hacen aquel evento.

Definiciones de Probabilidad cont.

Si los resultados del espacio muestral son ***equiprobables*** (igualmente probables), la probabilidad de un evento A es simplemente la proporción de resultados de A en el espacio muestral.

$$\text{Ley de Laplace : } \frac{\text{número de resultados favorables a } A}{\text{número de resultados posibles}} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Esta ley es la definición de Probabilidad a priori o clásica

Probabilidad subjetiva

En los dos enfoques de probabilidad anteriores, se definió a la probabilidad como la proporción de resultados favorables respecto al total de resultados. En la primera situación, dicha proporción se basa en datos observados y en la segunda en el conocimiento previo de un proceso (número finito de resultados igualmente probables).

El tercer enfoque de probabilidad se llama **probabilidad subjetiva y se refiere a la probabilidad** asignada a un suceso por una persona en particular. La misma puede ser bastante diferente de la probabilidad subjetiva que estipula otra persona.

Si un equipo de administración piensa que hay una probabilidad de 0.35 de que un nuevo producto tenga éxito en el mercado, esto constituye una probabilidad subjetiva. El valor 0.35 es una opinión, más que un valor basado en una evidencia objetiva.

Este tipo de probabilidad es frecuente en la toma de decisiones en el mercado, siendo confiable si la determina un experto en la materia.

Definiciones de Probabilidad cont.

Ejemplo: Asignando Probabilidades a eventos.

Experimento = lanzar dos dados. Asuma que los 36 puntos en el espacio muestral son **equiprobables**. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

S = { (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) }

a) Evento A = " No sale seis" P(A) =

b) Evento B = "Sale exactamente un seis" P(B) =

c) Evento C = "Salen exactamente dos seis" P(C) =

d) Evento D = "Sale al menos un seis" P(D) =

e) Compare 1 - P(A) con P(D).

f) Considere la suma de los valores de dos dados:

¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 3?

¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de al menos 11?

Reglas cuando asignamos probabilidades:

1. Cualquier probabilidad es siempre un valor numérico entre 0 y 1. La probabilidad es *cero* si el evento no puede ocurrir. La probabilidad es *uno* si el evento es seguro.

$$0 \le P(A) \le 1$$

2. Si sumamos las probabilidades de cada resultado individual en el espacio muestral, la probabilidad total tiene que ser uno.

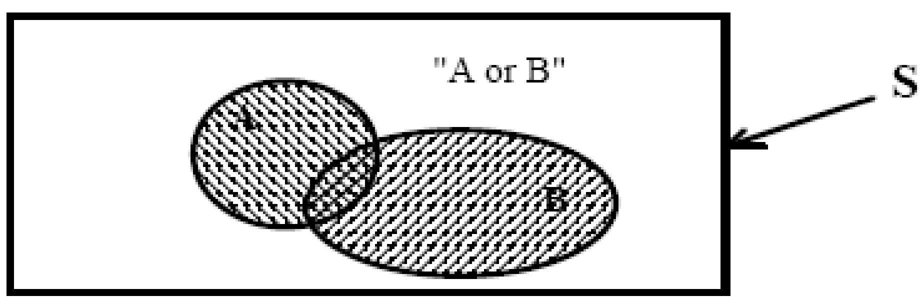
$$P(S) = 1$$

3. La probabilidad de que un evento A ocurra es uno menos la probabilidad de que el evento no ocurra.

$$P(A) = 1 - P(A^C)$$

4. Regla de la suma: La probabilidad de que un evento A o un evento B ocurra es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de la interacción.

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Si los dos eventos A y B son **disjuntos**, es decir, no tienen elementos en común, entonces:

$$P(A \text{ o } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definiciones de Probabilidad cont.

Ejemplo: Supongamos que se registra información sobre sexo y nivel de educación de 200 adultos seleccionados al azar entre los residentes de cierta comuna.

Sexo	Educación		
	Básica	Media	Universitaria
Hombre	38	28	22
Mujer	45	50	17

Considerar los siguientes eventos:
A="adulto seleccionado tiene educación universitaria"
B="adulto seleccionado es mujer"
¿Cuál es la probabilidad de que un adulto seleccionado aleatoriamente tenga educación universitaria o sea mujer?

Ejemplo: Una compañía de construcción local presentó sus proyectos en dos propuestas. La compañía cree que tiene una probabilidad de 0.5 de ganar la primera propuesta, de 0.4 de ganar la segunda y una probabilidad de 0.2 de ganar ambos contratos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía gane al menos un contrato, es decir, la probabilidad de ganar el primer contrato o el segundo o ambos?

b) Dibujar un diagrama de Venn para mostrar los dos eventos: A= "gana el primer contrato" y B= "gana el segundo contrato".

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el primer contrato pero no el segundo?

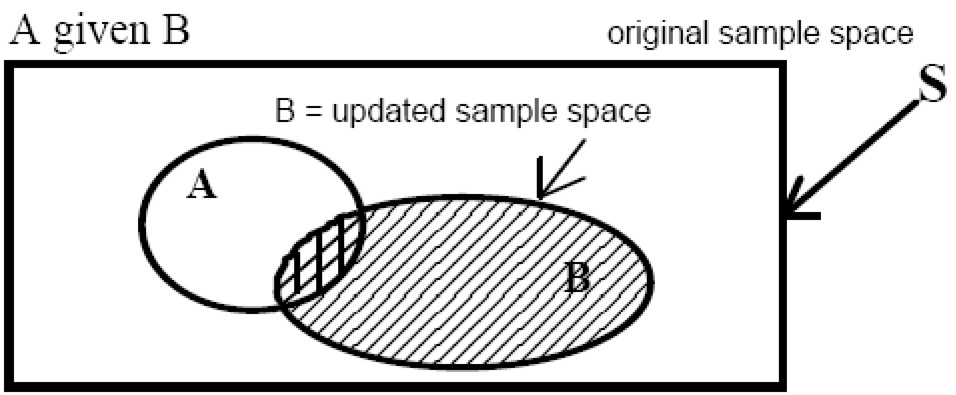
d) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el segundo contrato pero no el primero?

e) ¿Cuál es la probabilidad de no ganar ningún contrato?

Definiciones de Probabilidad cont.

Probabilidad Condicional.

En ocasiones, el conjunto de todos los "**resultados posibles**" puede constituir un **subconjunto del espacio muestral** original.



Definición:

La probabilidad condicional de que ocurra el evento A dado que el evento B ocurrió está dada por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{donde} \quad P(B) > 0$$

Nota: de esta relación se deduce que podemos escribir la intersección de otra manera usando la ***regla de la multiplicación:***

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

Definiciones de Probabilidad cont.

Ejemplo

El año 2004 la Universidad de Talca tenía 5453 estudiantes, en la tabla se muestra el detalle de la composición.

	Mujeres	Hombres	Total
Pregrado	2461	2848	5309
Postgrado	67	77	144
Total	2528	2925	5453

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea un estudiante de postgrado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer elegida al azar sea estudiante de postgrado?

c) Es este contexto, dar un ejemplo de eventos **mutuamente excluyentes**.

Ejemplos

1) Sea el experimento de lanzar un dado. El espacio muestral es S={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un dos?

b) Suponga que sabemos que el resultado es par, ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un dos?

2) Sea el experimento de lanzar una moneda dos veces. El espacio muestral es S={CC, SC, CS, SS}.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el segundo lanzamiento dado que salió cara en el primer lanzamiento?

Independencia

Comparar los resultados en los dos ejemplos anteriores.

En 2), la información no cambió la probabilidad buscada, es decir saber que "**salió cara en el primer lanzamiento**" no cambió la probabilidad de "**que salga cara en el segundo lanzamiento**“.

Esto es así porque los lanzamientos de la moneda son **eventos independientes**.

Cuando el resultado de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento, se dice que los sucesos son **estadísticamente independientes.**

Definición:

Dos eventos A y B son **independientes** si:

$$P(A \mid B) = P(A), \quad \text{o} \quad P(B \mid A) = P(B).$$

Si saber que un evento ocurrió no cambia la probabilidad de ocurrencia del otro evento, entonces los eventos son independientes.

Si dos eventos A y B son **independientes**, entonces la regla de la multiplicación:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ejemplo

SERNAC realiza una encuesta acerca de la calidad del servicio de reparación de automóviles en 86 talleres:

Taller	Atención	
	Buena	Regular
Autorizado	18	6
No autorizado	34	28

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar de una buena atención?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar sea no autorizado?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un taller elegido al azar sea no autorizado y de una buena atención?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que los talleres no autorizados den una buena atención?
e) ¿Son los eventos "no autorizado" y "buena atención" **disjuntos**?
f) ¿Son los eventos " no autorizado " y "buena atención" **independientes**?
g) Si fueran independientes, ¿Cuántos talleres no autorizados que dan buena atención esperarías encontrar?

Resumen

Reglas básicas de Probabilidad:

1. La probabilidad de que un evento A ocurra se denota por $P(A)$. Para cualquier evento A, $0 \le P(A) \le 1$.

2. La suma de todas las probabilidades de los resultados en el espacio muestral tiene que ser igual a uno: $P(S) = 1$

3. **Regla del Complemento**: La probabilidad de que un evento ocurra es 1 menos la probabilidad que el evento no ocurra. $P(A) = 1 - P(A^C)$

4. **Regla de la Suma**: La probabilidad de que el evento A o el evento B ocurra es la suma de sus probabilidades individuales menos la probabilidad de la intersección:

$$P(A \cup B) = P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes (o disjuntos), entonces:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B).$$

Resumen cont.

5. La **probabilidad condicional** de que ocurra un evento A, dado que ocurrió el evento B está dada por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ donde } P(B) > 0 .$$

De aquí sale la **regla de la multiplicación**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) .$$

Si dos eventos no se influencian entre sí, es decir, saber que uno ocurrió no cambia la probabilidad de que el otro ocurra, los eventos son independientes.

Dos eventos A y B son **independientes** si $P(A \mid B) = P(A)$,

o equivalentemente $P(B \mid A) = P(B)$, o equivalentemente $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Regla de Bayes

Ejemplo. Entre la población económicamente activa de una ciudad, el 40% ha completado la enseñanza básica, el 50 % la enseñanza media y el 10% la enseñanza superior. Entre los individuos que tienen educación básica hay una 10% de desempleados, entre los que tienen educación media un 5% y entre los graduados universitarios un 2%. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo económicamente activo esté desempleado?.

Sean los siguientes **eventos**:

B : desempleado.

A_1: nivel de enseñanza básica completa

A_2 : nivel de enseñanza media completa

A_3 : nivel de enseñanza universitaria completa

Las **probabilidades** respectivas son:

$P(A_1) = 0.40$, $P(A_2) = 0.50$, $P(A_3) = 0.10$, $P(B|A_1) = 0.10$,
$P(B|A_2) = 0.05$, $P(B|A_3) = 0.02$

Observar que:

A_1, A_2 y A_3 representan una partición del espacio muestral S y B es otro suceso relacionado con A_k . De esta manera se puede expresar lo siguiente:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$$

Regla de Bayes cont.

$$P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k) = 0.4 * 0.1 + 0.5 * 0.05 + 0.1 * 0.02 = 0.067$$

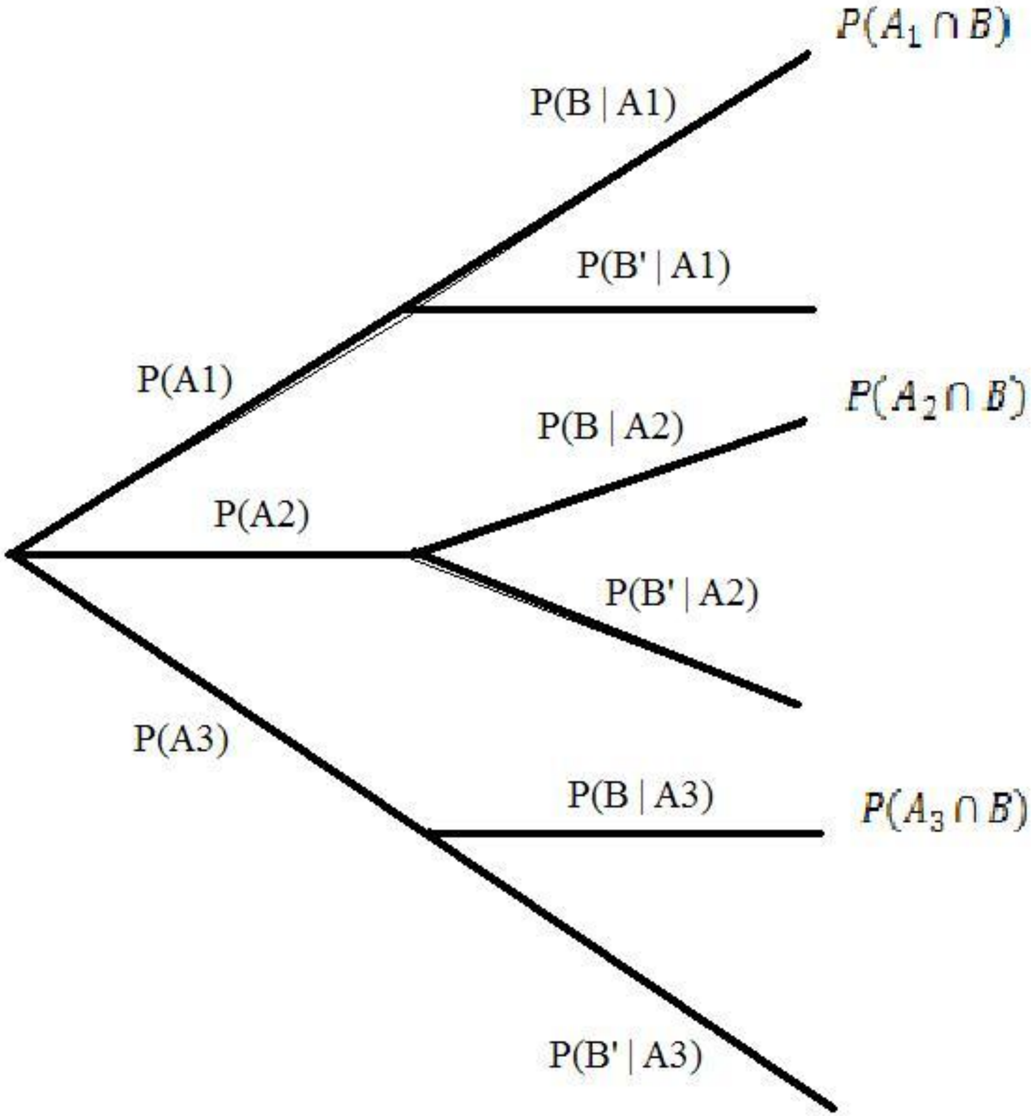
Esto indica que un 6.7 % de los trabajadores están desempleados.
Generalizando:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{j} P(A_k)\, P(B|A_k)$$

Esta aplicación se conoce como **Teorema de las probabilidades totales.**

Para resolver este tipo de problemas también es útil recurrir a un diagrama de árbol:
En las primeras ramas se colocan las **probabilidades a priori**, en las segundas las **probabilidades condicionales**. El producto de estas dan origen a las **probabilidades conjuntas.**

Regla de Bayes cont.



Regla de Bayes cont.

En el ejemplo:

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B|A_1) = 0.4 * 0.1 = 0.04$$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2)P(B|A_2) = 0.5 * 0.05 = 0.025$$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3)P(B|A_3) = 0.1 * 0.02 = 0.002$$

Teorema de Bayes

La probabilidad condicional toma en cuenta información acerca de la ocurrencia de un suceso para encontrar la probabilidad de otro. Este concepto puede extenderse para revisar probabilidades basadas en **nueva información** y para determinar la probabilidad de que un efecto en particular se deba a una causa específica. El procedimiento para revisar estas probabilidades se conoce como **Teorema de Bayes.**

En el ejemplo, supongamos que se elige un trabajador al azar y se encuentra que es un desempleado ¿cuál es la probabilidad de que hubiera terminado su enseñanza media?

El **Teorema de Bayes** se puede desarrollar a partir de la definición de **probabilidad condicional**:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.025}{0.067}$$

Regla de Bayes cont.

Se puede decir que ciertas CAUSAS (tipo de educación: A_1, A_2, A_3....) tienen probabilidades a **priori** $P(A_k)$. Existe un EFECTO B (desempleo), que no siempre ocurre cuando la causa está presente, por eso se habla de $P(B \mid A_k)$.

Cuando se usa la **probabilidad condicional** para invertir lo anterior, se calcula la probabilidad de una **causa**, dado el **efecto**, es decir, la probabilidad a **posteriori** $P(A_k \mid B)$.

Dado		**Se deduce**
$P(A_k)$		
	$\rightarrow$	$P(A_k \mid B)$
$P(B \mid A_k)$		

En general, el **Teorema de Bayes se obtiene en la ecuación:**

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}, \qquad j = 1,2,\dots,k$$

Observar que el denominador es la aplicación del teorema de las **probabilidades totales**.